XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, высшая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Пусть A = 11…11 (1526 единиц). При каком наибольшем n не существует натурального числа B, кратного A, сумма цифр которого равна n?*

**Ответ**. 9⋅1526−9 = 13725. **Решение**. Пусть некоторое число *n* делится на *A*. Заметим, что 101526−1 = 9*A*. Следовательно, если разрезать число *n* на куски по 1526 цифр с конца (возможно, что последний кусок будет состоять из меньшего количества цифр) и сложить все эти куски, то полученная сумма тоже будет делится на *A* и давать такой же остаток от деления на 9 как и число *n*. Будем называть такую сумму *суммой блоков* *числа n*.

Предположим, что существует число *n* с суммой цифр 9⋅1526–9 которое делится на *A* и, очевидно, делится на 9, то есть делится на 9*A*. Тогда его сумма блоков делится на 9*A*. После сложения блоков, возможно произойдут переносы, но тогда сумма цифр уменьшится на число, кратное 9. Если после сложения получится более чем 1526-значное число, то возьмем опять его сумму блоков и так будем продолжать, пока не получим число, у которого не более 1526 знаков (процесс конечен, так как уменьшается рассматриваемое число). Итак, мы получим число из 1526 знаков, у которого сумма цифр не больше чем 9⋅1526–9 и кратное 9*A*, что, очевидно, невозможно.

Докажем теперь, что любая сумма цифр, большая 9⋅1526–9, достигается. Рассмотрим число 101526*s*–1+*kA*⋅10*s* = , где *k* ⎯ однозначное натуральное число. Это число делится на *A*, а его сумма цифр равна 1526*k*+9*s*. Заметим, что числа 1526, 2⋅1526, …, 9⋅1526 дают все остатки от деления на 9. Тогда, как легко видеть, все числа, большие 9⋅1526–9, представляются в виде 1526*k*+9*s* с неотрицательным *s*.

♦ Только оценка: *6 баллов*. Только пример: *4 балла*.

**2.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

*C*

*B*

*A*

*D*

*E*

♦ Только ответ с примерами: *0 баллов*.

**3.** *Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник ABCDE (см. рис.). Оказалось, что углы ABC, BCD и DEA равны. Чему?*

**Ответ**. 108°. **Решение**. Пусть ∠*ABC* = ∠*BCD* = ∠*DEA* = α. Заметим, что *ABCD* ⎯ равнобедренная трапеция. Значит, ∠*CDA* = 180°−α. Тогда

∠*CDE* = ∠*CDA*−∠*EDA* = (180°−α)−(90°−α/2) = 90°−α/2 = ∠*EDA* = ∠*CDB*

(последнее равенство следует из равенства треугольников *BCD* и *AED*) Следовательно, точка *E* лежит на отрезке *DB*. Аналогично, точка *E* лежит на отрезке *AC*.

Из равенства треугольников *ABC* и *AED* имеем *DB* = *AD*. В равнобедренном треугольнике *BDA* углы при основании *AB* равны 180°−α, а угол при вершине *D* равен (180°−α)/2, откуда 180°−α = 72° и α = 108°.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

**4.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Какие числа может получить Петя такими операциями?*

**Ответ**. Все рациональные числа, не меньшие 5/8 и меньшие 1. **Решение**. *Оценка.* Операции умножения и деления числителя и знаменателя на одно и то же число не меняют дроби. Прибавление к числителю и знаменателю одного и того же числа оставляет знаменатель больше числителя, поэтому если исходная дробь была меньше 1, то и все получаемые дроби будут меньше 1. Кроме того, как легко проверить, если *a* < *b*, то *a*/*b* < (*a*+*m*)/(*b*+*m*), то есть все получаемые дроби будут больше 5/8. *Пример*. Чтобы получить дробь 5/8 < *a*/*b* < 1, достаточно умножить числитель и знаменатель дроби 5/8 на *b*−*a*, а потом прибавить 8*a*−5*b* и сократить полученную дробь на 3.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только оценка: *4 балла*, *по 2 балла* за верхнюю и нижнюю. Только пример: *4 балла*.

**5.** *У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число a ≤ 1, а таракан проползает a см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?*

**Ответ**. Да. **Решение**. Сначала Аня вводит в таракана любое число. Назовём направление, в котором он после этого пополз, *правильным*. Затем она вводит подряд числа 2−99, 2−98, …, 20, пока очередной шаг таракан не совершит в правильном направлении. В итоге он окажется в этом направлении хотя бы на 2−99 см дальше, чем был после первого шага. Повторяя такие действия, Аня сможет отогнать таракана в правильном направлении сколь угодно далеко.

**6.** *В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло оказаться среди приехавших в лагерь?*

**Ответ**. 15050. **Решение**. Ясно, что у каждого школьника есть не более трех незнакомых. Если их у каждого школьника не более двух, то каждый знаком с не менее чем 172 школьниками и всего пар знакомых не меньше, чем 175⋅172/2 = 15050. Пусть нашелся школьник *A*, у которого есть трое незнакомых *B*1, *B*2 и *B*3. Рассмотрим шестерку школьников: *A*, *B*1, *B*2, *B*3 и еще двоих произвольных школьников *C* и *D*. Их можно расселить по двум трехместным комнатам, поэтому *A* должен оказаться в одной комнате с *C* и *D* и, значит, *C* и *D* знакомы между собой и знакомы с *A*. Значит, любые два школьника, отличные от *B*1, *B*2 и *B*3, между собой знакомы. В частности, если какой-то школьник, отличный от *B*1, *B*2 и *B*3, с кем-то незнаком, то этот кто-то ⎯ один из *B*1, *B*2 и *B*3. Но каждый из *Bi* не знаком не более чем с тремя школьниками, поэтому пар незнакомых школьников оказывается не больше девяти. Значит, в этом случае пар знакомых школьников не меньше, чем 175⋅174/2−9 = 15216 > 15050. Покажем теперь, что 15050 пар школьников может быть. Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Несложно проверить, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи.

♦ Только оценка: *6 баллов*. Только пример: *2 балла*.

**7.** *Дан треугольник ABC, где ∠A = 70°, ∠B = 30° и ∠C = 80°. Точка D внутри треугольника такова, что ∠DAB = 30° и ∠DBA = 10°. Найдите угол DCB.*

**Ответ**. 50°. **Решение**. Пусть *O* — такая точка на отрезке *BD*, что ∠*OAB* = 10°. Тогда треугольник *AOB* — равнобедренный. С другой стороны, ∠*AOB* = 160° = 2∠*ACB*. Следовательно, *O* — центр описанной окружности треугольника *ABC*. Таким образом, *OA* = *OC*, а также ∠*CAO* = ∠*CAB*–∠*OAB* = 60°. Значит, треугольник *OAC* — равносторонний. Наконец, ∠*DAO* = ∠*DAB*–∠*OAB* = 30°–10° = 20°, ∠*DOA* — внешний к треугольнику *AOB*, т.е. ∠*DOA* = 2∠*OBA* = 20° = ∠*DAO*, откуда *DA* = *DO*. Следовательно, *D* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *AO*, и потому *CD* — биссектриса угла *ACO*. Значит, ∠*DCB* = ∠*ACB*–∠*ACD* = 80°–30° = 50°.

**8.** *Даны вещественные числа a1, a2, ..., a2016 и b1, b2, ..., b2016. Обозначим через xn число [na1+b1]+[na2+b2]+...+[na2016+b2016]. Нашлось такое число d, что для любого натурального k выполнено xk+1–xk = d. Докажите, что число a1+a2+...+a2016 — целое. Здесь через [x] обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.*

**Решение**. Положим *r* = [*a*1+*b*1]+…+[*a*2016+*b*2016]−*d*. Тогда *xn* = *dn*+*r* при всех натуральных *n*. По определению целой части *nai*+*bi*–1 < [*nai*+*bi*] ≤ *nai*+*bi*. Сложим все такие неравенства для *i* = 1, 2, …, 2016, обозначив *A* = *a*1+...+*a*2016, *B* = *b*1+...+*b*2016. Получим *An*+*B*–2016 < *dn*+*r* ≤ *An*+*B*. Отсюда *B*–2016–*r* < (*d*–*A*)*n* ≤ *B*–*r*. Так как это неравенство верно для всех *n*, а в левой и правой частях неравенства стоят константы, то *A* = *d*, то есть число *A* является целым.

♦ Задача решена для положительных чисел *ai*, *bi*: *6 баллов*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, первая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Существует ли натуральное число B, кратное 11111, сумма цифр которого равна 36?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть некоторое число *B* делится на 11111 и его сумма цифр равна 36. Тогда оно делится на 9 и на 11111, следовательно, и на 99999. Разрежем число *B* на куски по 5 цифр с конца (возможно, что последний кусок будет состоять из меньшего количества цифр) и сложим все эти куски. Так как 105−1 = 99999, то полученная сумма тоже будет делиться на 99999. Заметим, что сумма цифр нового числа будет не больше 36 (она могла уменьшится за счет переносов), а само число будет делиться на 99999. Если получилось более чем пятизначное число, то повторим эту операцию. Так как число уменьшается, то рано или поздно мы получим число, не более чем пятизначное, кратное 99999, с суммой цифр не больше 36, что невозможно.

**2.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

♦ Только ответ с примерами: *0 баллов*.

**3.** *Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник ABCDE (см. рис.). Оказалось, что углы ABC, BCD и DEA равны. Чему?*

*C*

*B*

*A*

*D*

*E*

**Ответ**. 108°. **Решение**. Пусть ∠*ABC* = ∠*BCD* = ∠*DEA* = α. Заметим, что *ABCD* ⎯ равнобедренная трапеция. Значит, ∠*CDA* = 180°−α. Тогда ∠*CDE* = ∠*CDA*−∠*EDA* = (180°−α)−(90°−α/2) = 90°−α/2 = ∠*EDA* = ∠*CDB* (последнее равенство следует из равенства треугольников *BCD* и *AED*) Следовательно, точка *E* лежит на отрезке *DB*. Аналогично, точка *E* лежит на отрезке *AC*.

Из равенства треугольников *ABC* и *AED* имеем *DB* = *AD*. В равнобедренном треугольнике *BDA* углы при основании *AB* равны 180°−α, а угол при вершине *D* равен (180°−α)/2, откуда 180°−α = 72° и α = 108°.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

**4.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Может ли Петя получить дробь 3/5?*

**Ответ**. Не может. **Решение**. Понятно, что в итоге всё сводится к однократному умножению обоих чисел на некоторое положительное рациональное число с последующим прибавлением к полученным произведениям одного и того же положительного рационального числа. Пусть умножали на *k*, а прибавляли *m*. Если искомое возможно, то (5*k*+*m*)/(8*k*+*m*) = 3/5 ⇔ 25*k*+5*m* = 24*k*+3*m*. Но 25*k*+5*m* > 24*k*+3*m*. **Набросок второго решения**. Нетрудно показать, что при всех описанных в условии операциях отношение числа, написанного на первой доске, к числу, написанному на второй доске, либо остается неизменным, либо возрастает, а 3/5 меньше, чем 5/8.

**5.** *У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число a ≤ 1, а таракан проползает a см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?*

**Ответ**. Да. **Решение**. Сначала Аня вводит в таракана любое число. Назовём направление, в котором он после этого пополз, *правильным*. Затем она вводит подряд числа 2−99, 2−98, …, 20, пока очередной шаг таракан не совершит в правильном направлении. В итоге он окажется в этом направлении хотя бы на 2−99 см дальше, чем был после первого шага. Повторяя такие действия, Аня сможет отогнать таракана в правильном направлении сколь угодно далеко.

**6.** *В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло оказаться среди приехавших в лагерь?*

**Ответ**. 15050. **Решение**. Ясно, что у каждого школьника есть не более трех незнакомых. Если их у каждого школьника не более двух, то каждый знаком с не менее чем 172 школьниками и всего пар знакомых не меньше, чем 175⋅172/2 = 15050. Пусть нашелся школьник *A*, у которого есть трое незнакомых *B*1, *B*2 и *B*3. Рассмотрим шестерку школьников: *A*, *B*1, *B*2, *B*3 и еще двоих произвольных школьников *C* и *D*. Их можно расселить по двум трехместным комнатам, поэтому *A* должен оказаться в одной комнате с *C* и *D* и, значит, *C* и *D* знакомы между собой и знакомы с *A*. Значит, любые два школьника, отличные от *B*1, *B*2 и *B*3, между собой знакомы. В частности, если какой-то школьник, отличный от *B*1, *B*2 и *B*3, с кем-то незнаком, то этот кто-то ⎯ один из *B*1, *B*2 и *B*3. Но каждый из *Bi* не знаком не более чем с тремя школьниками, поэтому пар незнакомых школьников оказывается не больше девяти. Значит, в этом случае пар знакомых школьников не меньше, чем 175⋅174/2−9 = 15216 > 15050. Покажем теперь, что 15050 пар школьников может быть. Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Несложно проверить, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи.

♦ Только оценка: *6 баллов*. Только пример: *2 балла*.

**7.** *Пусть AM — медиана треугольника ABC; P — основание перпендикуляра из точки B на биссектрису угла BMA; Q — основание перпендикуляра из точки C на биссектрису угла CMA. Отрезки AM и PQ пересекаются в точке S. Докажите, что PS = QS.*

**Решение**. Заметим, что лучи *BP* и *CQ* пересекаются в точке *R* на прямой *AM*, для которой *RM* = *MB* = *MC*. Далее, ∠*PMQ* = 90°, так что *MPRQ* ⎯ прямоугольник, диагонали *PQ* и *RM* которого делятся пополам точкой *S* своего пересечения, откуда *PS* = *QS*.

**8.** *Даны вещественные числа a и b. Нашлось такое число d, что для любого натурального n выполнено [a(n+1)+b]−[an+b] = d. Докажите, что число a — целое. Здесь через [x] обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.*

**Решение**. Положим *r* = [*a*+*b*]−*d*. Тогда [*an*+*b*] = *dn*+*r* при всех натуральных *n*. По определению целой части *na*+*b*–1 < [*na*+*b*] ≤ *na*+*b*, откуда *b*–1–*r* < (*d*–*a*)*n* ≤ *b*–*r*. Так как это неравенство верно для всех *n*, а в левой и правой частях неравенства стоят константы, то *a* = *d*, то есть число *a* является целым.

♦ Задача решена для положительных чисел *a* и *b*: *6 баллов*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, вторая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Какую сумму цифр не может иметь натуральное число, кратное 11? Перечислите все варианты и объясните, почему других нет.*

**Ответ**. 1, 3, 5, 7, 9. **Решение**. Любую чётную сумму цифр дают числа вида 1…1, сумму 11 ⎯ число 209, любую нечётную, начиная с 13, числа вида 1…1209. Пусть число *B* имеет нечётную сумму цифр, не большую 9. Тогда знакопеременная сумма его цифр также по модулю не больше 9, и должна делиться на 11, если число делится на 11. Но в таком случае она равна 0, что невозможно, так как она нечётна.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**2.** *Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?*

**Решение**. Занумеруем арбузы числами от 1 до 11. Сначала взвесим арбузы 3-5, 6-8 и 9-11 и узнаем их суммарный вес. Затем взвесим арбузы 1 и 2 с каждым из арбузов 3-5. Сложив результаты этих взвешиваний, мы узнаем суммарный вес арбузов 1 и 2, если вычтем из этой суммы общий вес арбузов 3-5 и поделим результат на 3.

**3.** *Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник ABCDE (см. рис.). Оказалось, что углы ABC, BCD и DEA равны. Чему?*

*C*

*B*

*A*

*D*

*E*

**Ответ**. 108°. **Решение**. Пусть ∠*ABC* = ∠*BCD* = ∠*DEA* = α. Заметим, что *ABCD* ⎯ равнобедренная трапеция. Значит, ∠*CDA* = 180°−α. Тогда ∠*CDE* = ∠*CDA*−∠*EDA* = (180°−α)−(90°−α/2) = 90°−α/2 = ∠*EDA* = ∠*CDB* (последнее равенство следует из равенства треугольников *BCD* и *AED*) Следовательно, точка *E* лежит на отрезке *DB*. Аналогично, точка *E* лежит на отрезке *AC*.

Из равенства треугольников *ABC* и *AED* имеем *DB* = *AD*. В равнобедренном треугольнике *BDA* углы при основании *AB* равны 180°−α, а угол при вершине *D* равен (180°−α)/2, откуда 180°−α = 72° и α = 108°.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

**4.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Может ли Петя получить дробь 5/7?*

**Ответ**. Может. **Решение**. Умножим числитель и знаменатель на 2 и прибавим к ним по 5 и разделим на числитель и знаменатель на 3.

**5.** *У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое натуральное число a ≤ 100, а таракан проползает a см вправо или влево. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 5 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 км от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?*

**Ответ**. Да. **Решение**. Сначала Аня вводит в таракана любое число. Назовём направление, в котором он после этого пополз, *правильным*. Затем она вводит подряд натуральные степени двойки, пока очередной шаг таракан не совершит в правильном направлении. В итоге он окажется на 1 см дальше, чем был после первого шага. Повторяя такие действия, Аня сможет отогнать таракана в правильном направлении сколь угодно далеко.

**6.** *В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Каково наименьшее число пар знакомых среди пришедших школьников?*

**Ответ**. 25⋅11 = 275. **Решение**. *Оценка*. Допустим, есть школьник, незнакомый хотя бы с троими. Тогда для четвёрки из него и этих троих нарушено условие задачи. Значит, каждый незнаком максимум с двоими, то есть пар незнакомых не более 25, а знакомых ⎯ не менее 25⋅24/2−25 = 25⋅11. *Пример.* Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Действительно, рассмотрим произвольную четвёрку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим «напротив» него (т.е. с сидящим через одного от него), поскольку за большим столом он не мог быть его соседом. Итак, мы выбрали две непересекающиеся пары знакомых между собой.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**7.** *Пусть AM — медиана треугольника ABC; P — основание перпендикуляра из точки B на биссектрису угла BMA; Q — основание перпендикуляра из точки C на биссектрису угла CMA. Отрезки AM и PQ пересекаются в точке S. Докажите, что PS = QS.*

**Решение**. Заметим, что лучи *BP* и *CQ* пересекаются в точке *R* на прямой *AM*, для которой *RM* = *MB* = *MC*. Далее, ∠*PMQ* = 90°, так что *MPRQ* ⎯ прямоугольник, диагонали *PQ* и *RM* которого делятся пополам точкой *S* своего пересечения, откуда *PS* = *QS*.

**8.** *Найдите все такие вещественные числа x, что оба числа x+ и x2+ — рациональные.*

**Ответ**. 1/2−**. **Решение**. Пусть *x+* = *r* ⎯ рационально. Тогда *x*2+** = *r*2+5−(2*r*−1)** рационально тогда и только тогда, когда 2*r*−1 = 0 ⇔ *r* = 1/2, откуда и получаем ответ.

♦ Только ответ: *4 балла*. Иррациональность ** считать известной.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, высшая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди приехавших в лагерь?*

**Ответ**. 15050. **Решение**. Ясно, что у каждого школьника есть не более трех незнакомых. Если их у каждого школьника не более двух, то каждый знаком с не менее чем 172 школьниками и всего пар знакомых не меньше, чем 175⋅172/2 = 15050. Пусть нашелся школьник *A*, у которого есть трое незнакомых *B*1, *B*2 и *B*3. Рассмотрим шестерку школьников: *A*, *B*1, *B*2, *B*3 и еще двоих произвольных школьников *C* и *D*. Их можно расселить по двум трехместным комнатам, поэтому *A* должен оказаться в одной комнате с *C* и *D* и, значит, *C* и *D* знакомы между собой и знакомы с *A*. Значит, любые два школьника, отличные от *B*1, *B*2 и *B*3, между собой знакомы. В частности, если какой-то школьник, отличный от *B*1, *B*2 и *B*3, с кем-то незнаком, то этот кто-то ⎯ один из *B*1, *B*2 и *B*3. Но каждый из *Bi* не знаком не более чем с тремя школьниками, поэтому пар незнакомых школьников оказывается не больше девяти. Значит, в этом случае пар знакомых школьников не меньше, чем 175⋅174/2−9 = 15216 > 15050. Покажем теперь, что 15050 пар школьников может быть. Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Несложно проверить, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

**2.** *На плоскости проведено n прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.*

**Ответ**. 50, 56, 98. **Решение**. Все прямые разбиваются на равные по числу прямых группы параллельных: иначе прямые из группы, где прямых меньше, будут пересекаться с большим числом прямых, чем прямые из группы, где их больше. Пусть имеется *b групп по a прямых* в каждой. Тогда каждая прямая пересекает *a*(*b*−1) = 49 прямых. Возможны случаи *a* = 1, *b*−1 = 49 (*n* = 50), *a* = 7, *b*−1 = 7 (*n* = 56) и *a* = 49, *b*−1 = 1 (*n* = 98).

♦ Потеря одного или двух ответов при верном в целом рассуждении: *дыра в 2 или 4 балла соответственно.*

**3.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Какие числа может получить Петя такими операциями?*

**Ответ**. Все рациональные числа, не меньшие 5/8 и меньшие 1. **Решение**. *Оценка.* Операции умножения и деления числителя и знаменателя на одно и то же число не меняют дроби. Прибавление к числителю и знаменателю одного и того же числа оставляет знаменатель больше числителя, поэтому если исходная дробь была меньше 1, то и все получаемые дроби будут меньше 1. Кроме того, как легко проверить, если *a* < *b*, то *a*/*b* < (*a*+*m*)/(*b*+*m*), то есть все получаемые дроби будут больше 5/8. *Пример*. Чтобы получить дробь 5/8 < *a*/*b* < 1, достаточно умножить числитель и знаменатель дроби 5/8 на *b*−*a*, а потом прибавить 8*a*−5*b* и сократить полученную дробь на 3.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только оценка: *4 балла*, *по 2 балла* за верхнюю и нижнюю. Только пример: *4 балла*.

**4.** *Число n назовём* ***хорошим****, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Могут ли для какого-то натурального n числа n, n+4 и n+8 быть хорошими?*

**Ответ**. Не могут. **Решение**. Покажем, что в разложение хорошего числа на простые множители каждый нечётный множитель входит в чётной степени. В самом деле, если простое число *p* > 2 входит в разложение числа *n* в степени 2*m*+1, все делители числа *n* можно разбить на пары, где один делитель в *p* раз больше другого. Но, как нетрудно видеть, сумма двух делителей в такой паре чётна, и потому чётна сумма всех делителей числа *n*, а сумма всех его делителей без единицы нечётна, и потому эти делители нельзя разбить на две группы с равными суммами. Таким образом, всякое хорошее число ⎯ либо квадрат, если 2 входит в его разложение в чётной степени, либо удвоенный квадрат, если в нечётной.

Среди трёх чисел *n*, *n*+4, *n*+8 найдутся либо два квадрата, либо два удвоенных квадрата. Но разность двух квадратов и двух удвоенных квадратов не может равняться 4, а 8 разность квадратов может равняться только в случае 32−12, но числа 1 и 3 не являются хорошими.

**5.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

♦ Потеря одного из двух ответов при верном в целом рассуждении: *дыра в 2 балла.*

**6.** *6 идущих подряд натуральных чисел каким-то образом разбивают на две тройки чисел. Затем считают произведения чисел в этих тройках и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и разбив их на тройки — (1, 5, 6) и (2, 3, 4), мы получим 30−24 = 6.) Какое наименьшее значение может принимать результат?*

**Ответ**. 2. **Решение**. *Оценка*. Допустим, разность двух произведений равна 1. Тогда они имеют разную чётность, и все чётные числа из шестёрки должны составлять одну тройку, а все нечётные ⎯ другую. Но нетрудно проверить, что разность (*n*+1)(*n*+3)(*n*+5)−*n*(*n*+2)(*n*+4) больше 1. Допустим, два произведения равны. Заметим, что среди трёх идущих подряд нечётных чисел есть число *k*, не делящееся ни на 3, ни на 5. Если это единица, то у нас числа от 1 до 6, и произведение, содержащее пятёрку, не может равняться другому. Если же это не единица, то все простые делители числа *k* больше 5. Значит, *k* взаимно просто с остальными числами шестёрки, и потому произведение, содержащее *k*, не может равняться второму произведению. *Пример*. 3⋅4⋅6−2⋅5⋅7 = 2.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

**7.** *Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам ab(c+d) ≥ (a+b)cd и ab+cd ≥ (a+b)(c+d). Докажите, что a+b > c+d.*

**Решение**. Заметим, что *ab*(*ab*+*cd*) ≥ (*a*+*b*)(*c*+*d*)*ab* ≥ (*a*+*b*)2*cd* ≥ 4*ab*⋅*cd*. Следовательно, *ab*+*cd* ≥ 4*cd* и, значит, *ab* ≥ 3*cd*. Тогда (*a*+*b*)2 ≥ 4*ab* ≥ 3(*ab*+*cd*) ≥ 3(*a*+*b*)(*c*+*d*). Стало быть, *a*+*b* ≥ 3(*c*+*d*)>*c*+*d*.

♦ Доказано только, что *ab* ≥ 3*cd*: *6 баллов*.

**8.** *В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок AM из точки B. На отрезке AM выбрана такая точка Q, что AQ = 2PM. Докажите, что ∠CQM = ∠BAM.*

**Решение**. Опустим из вершины *C* на *AM* перпендикуляр *CR*. Легко видеть, что точки *P* и *R* расположены с разных сторон от *BC*. Из равенства треугольников *BMP* и *CMR* получаем, что *CR* = *BP* и *PM* = *RM*. Но тогда *PR* = 2*PM* = *AQ*, откуда *AP* = *QR*. Но это значит, что прямоугольные треугольники *APB* и *CRQ* равны по двум катетам, откуда и следует, что ∠*CQM* = ∠*BAM*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, первая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *В оздоровительном лагере отдыхают 225 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых шестерых школьников есть три непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди отдыхающих в лагере?*

**Ответ**. 24750. **Решение**. Предположим, что Вася не знаком хотя бы с пятью школьниками. Тогда шестерка из Васи и пятерых незнакомых ему школьников не удовлетворяет условию задачи. Значит, у каждого школьника не более четырех незнакомых, и каждый знаком с не менее чем 220 школьниками. Тогда всего пар знакомых не меньше, чем 225⋅220/2 = 24750. Покажем теперь, что 24750 пар школьников может быть. Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом и сидящих через одного. Эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Действительно, рассмотрим произвольную шестерку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим «напротив» него (т.е. с сидящим через двух от него), поскольку за большим столом он не мог быть ни его соседом, ни сидящим через одного от него. Итак, мы выбрали три непересекающиеся пары знакомых между собой.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**2.** *На плоскости проведено n прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.*

**Ответ**. 50, 56, 98. **Решение**. Все прямые разбиваются на равные по числу прямых группы параллельных: иначе прямые из группы, где прямых меньше, будут пересекаться с большим числом прямых, чем прямые из группы, где их больше. Пусть имеется *b групп по a прямых* в каждой. Тогда каждая прямая пересекает *a*(*b*−1) = 49 прямых. Возможны случаи *a* = 1, *b*−1 = 49 (*n* = 50), *a* = 7, *b*−1 = 7 (*n* = 56) и *a* = 49, *b*−1 = 1 (*n* = 98).

♦ Потеря одного или двух ответов при верном в целом рассуждении: *дыра в 2 или 4 балла соответственно.*

**3.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?*

**Ответ**. Не может. **Решение**. Понятно, что в итоге всё сводится к однократному умножению обоих чисел на некоторое положительное рациональное число с последующим прибавлением к полученным произведениям одного и того же положительного рационального числа. Пусть умножали на *k*, а прибавляли *m*. Если искомое возможно, то (5*k*+*m*)/(8*k*+*m*) = 3/5 ⇔ 25*k*+5*m* = 24*k*+3*m*. Но 25*k*+5*m* > 24*k*+3*m*. **Набросок второго решения**. Нетрудно показать, что при всех описанных в условии операциях отношение числа, написанного на первой доске, к числу, написанному на второй доске, либо остается неизменным, либо возрастает, а 3/5 меньше, чем 5/8.

**4.** *Число n назовём хорошим, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Могут ли для какого-то натурального n числа n, n+4 и n+8 быть хорошими?*

**Ответ**. Не могут. **Решение**. Покажем, что в разложение хорошего числа на простые множители каждый нечётный множитель входит в чётной степени. В самом деле, если простое число *p* > 2 входит в разложение числа *n* в степени 2*m*+1, все делители числа *n* можно разбить на пары, где один делитель в *p* раз больше другого. Но, как нетрудно видеть, сумма двух делителей в такой паре чётна, и потому чётна сумма всех делителей числа *n*, а сумма всех его делителей без единицы нечётна, и потому эти делители нельзя разбить на две группы с равными суммами. Таким образом, всякое хорошее число ⎯ либо квадрат, если 2 входит в его разложение в чётной степени, либо удвоенный квадрат, если в нечётной.

Среди трёх чисел *n*, *n*+4, *n*+8 найдутся либо два квадрата, либо два удвоенных квадрата. Но разность двух квадратов и двух удвоенных квадратов не может равняться 4, а 8 разность квадратов может равняться только в случае 32−12, но числа 1 и 3 не являются хорошими.

**5.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

♦ Потеря одного из двух ответов при верном в целом рассуждении: *дыра в 2 балла.*

**6.** *6 идущих подряд натуральных чисел каким-то образом разбивают на две тройки чисел. Затем считают произведения чисел в этих тройках и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и разбив их на тройки — (1, 5, 6) и (2, 3, 4), мы получим 30−24 = 6.) Какое наименьшее значение может принимать результат?*

**Ответ**. 2. **Решение**. *Оценка*. Допустим, разность двух произведений равна 1. Тогда они имеют разную чётность, и все чётные числа из шестёрки должны составлять одну тройку, а все нечётные ⎯ другую. Но нетрудно проверить, что разность (*n*+1)(*n*+3)(*n*+5)−*n*(*n*+2)(*n*+4) больше 1. Допустим, два произведения равны. Заметим, что среди трёх идущих подряд нечётных чисел есть число *k*, не делящееся ни на 3, ни на 5. Если это единица, то у нас числа от 1 до 6, и произведение, содержащее пятёрку, не может равняться другому. Если же это не единица, то все простые делители числа *k* больше 5. Значит, *k* взаимно просто с остальными числами шестёрки, и потому произведение, содержащее *k*, не может равняться второму произведению. *Пример*. 3⋅4⋅6−2⋅5⋅7 = 2.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

**7.** *Попарно различные положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам ab(c+d) ≥ (a+b)cd и ab+cd ≥ (a+b)(c+d). Какое из чисел ab и 3cd больше?*

**Решение**. Заметим, что *ab*(*ab*+*cd*) ≥ (*a*+*b*)(*c*+*d*)*ab* ≥ (*a*+*b*)2*cd* > 4*ab*⋅*cd*. Следовательно, *ab*+*cd* > 4*cd* и, значит, *ab* > 3*cd*.

♦ Доказано только нестрогое неравенство *ab* ≥ 3*cd*: *дыра в 4 балла*.

**8.** *В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок AM из точки B. На отрезке AM выбрана такая точка Q, что AQ = 2PM. Докажите, что ∠CQM = ∠BAM.*

**Решение**. Опустим из вершины *C* на *AM* перпендикуляр *CR*. Легко видеть, что точки *P* и *R* расположены с разных сторон от *BC*. Из равенства треугольников *BMP* и *CMR* получаем, что *CR* = *BP* и *PM* = *RM*. Но тогда *PR* = 2*PM* = *AQ*, откуда *AP* = *QR*. Но это значит, что прямоугольные треугольники *APB* и *CRQ* равны по двум катетам, откуда и следует, что ∠*CQM* = ∠*BAM*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, вторая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *В оздоровительном лагере отдыхают 225 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых шестерых школьников есть три непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди отдыхающих в лагере?*

**Ответ**. 24750. **Решение**. Предположим, что Вася не знаком хотя бы с пятью школьниками. Тогда шестерка из Васи и пятерых незнакомых ему школьников не удовлетворяет условию задачи. Значит, у каждого школьника не более четырех незнакомых, и каждый знаком с не менее чем 220 школьниками. Тогда всего пар знакомых не меньше, чем 225⋅220/2 = 24750. Покажем теперь, что 24750 пар школьников может быть. Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом и сидящих через одного. Эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Действительно, рассмотрим произвольную шестерку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим «напротив» него (т.е. с сидящим через двух от него), поскольку за большим столом он не мог быть ни его соседом, ни сидящим через одного от него. Итак, мы выбрали три непересекающиеся пары знакомых между собой.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**2.** *На плоскости проведено n прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.*

**Ответ**. 50, 56, 98. **Решение**. Все прямые разбиваются на равные по числу прямых группы параллельных: иначе прямые из группы, где прямых меньше, будут пересекаться с большим числом прямых, чем прямые из группы, где их больше. Пусть имеется *b групп по a прямых* в каждой. Тогда каждая прямая пересекает *a*(*b*−1) = 49 прямых. Возможны случаи *a* = 1, *b*−1 = 49 (*n* = 50), *a* = 7, *b*−1 = 7 (*n* = 56) и *a* = 49, *b*−1 = 1 (*n* = 98).

♦ Потеря одного или двух ответов при верном в целом рассуждении: *дыра в 2 или 4 балла соответственно.*

**3.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?*

**Ответ**. Не может. **Решение**. Понятно, что в итоге всё сводится к однократному умножению обоих чисел на некоторое положительное рациональное число с последующим прибавлением к полученным произведениям одного и того же положительного рационального числа. Пусть умножали на *k*, а прибавляли *m*. Если искомое возможно, то (5*k*+*m*)/(8*k*+*m*) = 3/5 ⇔ 25*k*+5*m* = 24*k*+3*m*. Но 25*k*+5*m* > 24*k*+3*m*. **Набросок второго решения**. Нетрудно показать, что при всех описанных в условии операциях отношение числа, написанного на первой доске, к числу, написанному на второй доске, либо остается неизменным, либо возрастает, а 3/5 меньше, чем 5/8.

**4.** *Число n назовём* ***хорошим****, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что если числа n и n+1 — хорошие, то их произведение — удвоенный квадрат натурального числа.*

**Решение**. Покажем, что в разложение хорошего числа на простые множители каждый нечётный множитель входит в чётной степени. В самом деле, если простое число *p* > 2 входит в разложение числа *n* в степени 2*m*+1, все делители числа *n* можно разбить на пары, где один делитель в *p* раз больше другого. Но, как нетрудно видеть, сумма двух делителей в такой паре чётна, и потому чётна сумма всех делителей числа *n*, а сумма всех его делителей без единицы нечётна, и потому эти делители нельзя разбить на две группы с равными суммами. Таким образом, всякое хорошее число ⎯ либо квадрат, если 2 входит в его разложение в чётной степени, либо удвоенный квадрат, если в нечётной. Поскольку числа *n* и *n*+1 не могут одновременно быть ни квадратами, ни удвоенными квадратами, одно из них ⎯ квадрат, а другое ⎯ удвоенный квадрат, откуда и вытекает утверждение задачи.

**5.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

♦ Потеря одного из двух ответов при верном в целом рассуждении: *дыра в 2 балла.*

**6.** *4 идущих подряд натуральных числа каким-то образом разбивают на две пары чисел. Затем считают произведения чисел в этих парах и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 5, 6, 7, 8 и разбив их на пары — (5, 6) и (7, 8), мы получим 56−30 = 26.) Какое наименьшее значение может принимать результат? Минимум берётся по всем четвёркам и всем разбиениям.*

**Ответ**. 2. **Решение**. Пусть наименьшее из чисел равно *n*. Возможны три случая: (*n*+1)(*n*+2)−*n*(*n*+3) = 2, (*n*+1)(*n*+3)−*n*(*n*+2) = 2*n*+1 и (*n*+2)(*n*+3)−*n*(*n*+1) = 4*n*+4. При *n*≥ 1 наименьшая из трех этих разностей равна 2.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**7.** *Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?*

**Решение**. Занумеруем арбузы числами от 1 до 11. Сначала взвесим арбузы 3-5, 6-8 и 9-11 и узнаем их суммарный вес. Затем взвесим арбузы 1 и 2 с каждым из арбузов 3-5. Сложив результаты этих взвешиваний, мы узнаем суммарный вес арбузов 1 и 2, если вычтем из этой суммы общий вес арбузов 3-5 и поделим результат на 3.

**8.** *В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок AM из точки B. На отрезке AM выбрана такая точка Q, что AQ = 2PM. Докажите, что ∠CQM = ∠BAM.*

**Решение**. Опустим из вершины *C* на *AM* перпендикуляр *CR*. Легко видеть, что точки *P* и *R* расположены с разных сторон от *BC*. Из равенства треугольников *BMP* и *CMR* получаем, что *CR* = *BP* и *PM* = *RM*. Но тогда *PR* = 2*PM* = *AQ*, откуда *AP* = *QR*. Но это значит, что прямоугольные треугольники *APB* и *CRQ* равны по двум катетам, откуда и следует, что ∠*CQM* = ∠*BAM*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, третья лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди пришедших?*

**Ответ**. 25⋅11 = 275. **Решение**. *Оценка*. Допустим, есть школьник, незнакомый хотя бы с троими. Тогда для четвёрки из него и этих троих нарушено условие задачи. Значит, каждый незнаком максимум с двоими, то есть пар незнакомых не более 25, а знакомых ⎯ не менее 25⋅24/2−25 = 25⋅11. *Пример.* Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Действительно, рассмотрим произвольную четвёрку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим «напротив» него (т.е. с сидящим через одного от него), поскольку за большим столом он не мог быть его соседом. Итак, мы выбрали две непересекающиеся пары знакомых между собой.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**2.** *Число N назовём* ***особым****, если на плоскости можно провести N прямых, каждая из которых пересекается ровно с 10 другими. Найдите 4 особых числа.*

**Ответ**. 11, 12, 15 и 20. **Решение**. 11: Каждые две прямые пересекаются. 12: 6 пар параллельных прямых, прямые из разных пар не параллельны. 15: три пятёрки параллельных прямых, прямые из разных пятёрок не параллельны. 20: две десятки параллельных прямых.

**3.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?*

**Ответ**. Не может. **Решение**. Понятно, что в итоге всё сводится к однократному умножению обоих чисел на некоторое положительное рациональное число с последующим прибавлением к полученным произведениям одного и того же положительного рационального числа. Пусть умножали на *k*, а прибавляли *m*. Если искомое возможно, то (5*k*+*m*)/(8*k*+*m*) = 3/5 ⇔ 25*k*+5*m* = 24*k*+3*m*. Но 25*k*+5*m* > 24*k*+3*m*. **Набросок второго решения**. Нетрудно показать, что при всех описанных в условии операциях отношение числа, написанного на первой доске, к числу, написанному на второй доске, либо остается неизменным, либо возрастает, а 3/5 меньше, чем 5/8.

**4.** *Существует ли такое натуральное число, что все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами?*

**Ответ**. Да. **Решение**. Например, число 36.

**5.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

♦ Потеря одного из двух ответов при верном в целом рассуждении: *дыра в 2 балла.*

**6.** *4 идущих подряд натуральных числа каким-то образом разбивают на две пары чисел. Затем считают произведения чисел в этих парах и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 5, 6, 7, 8 и разбив их на пары — (5, 6) и (7, 8), мы получим 56−30 = 26.) Какое наименьшее значение может принимать результат? Минимум берётся по всем четвёркам и всем разбиениям.*

**Ответ**. 2. **Решение**. Пусть наименьшее из чисел равно *n*. Возможны три случая: (*n*+1)(*n*+2)−*n*(*n*+3) = 2, (*n*+1)(*n*+3)−*n*(*n*+2) = 2*n*+1 и (*n*+2)(*n*+3)−*n*(*n*+1) = 4*n*+4. При *n*≥ 1 наименьшая из трех этих разностей равна 2.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**7.** *Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?*

**Решение**. Занумеруем арбузы числами от 1 до 11. Сначала взвесим арбузы 3-5, 6-8 и 9-11 и узнаем их суммарный вес. Затем взвесим арбузы 1 и 2 с каждым из арбузов 3-5. Сложив результаты этих взвешиваний, мы узнаем суммарный вес арбузов 1 и 2, если вычтем из этой суммы общий вес арбузов 3-5 и поделим результат на 3.

**8.** *Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование?*

**Ответ**. 50. **Решение**. Допустим, изначально лжецов было больше 51. Тогда из аудитории могли выходить только рыцари, но их не больше 48, противоречие. Если изначально лжецов было меньше 50, из аудитории могли выходить только лжецы, снова противоречие. Пусть в аудитории вначале был 51 лжец. Если первым из неё вышел рыцарь, то дальше тоже могли выходить только рыцари, а их меньше 60, противоречие. Значит, первым вышел лжец, но тогда он сказал правду, противоречие. Итак, в аудитории первоначально было по 50 рыцарей и лжецов.

♦ Достаточно доказать, что рыцарей не могло быть ни больше, ни меньше 50, доказывать, что в ситуации 50/50 условие задачи выполнено, не обязательно.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», высшая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

**1.** *Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование? (*

**Ответ**. 50. **Решение**. Допустим, изначально лжецов было больше 51. Тогда из аудитории могли выходить только рыцари, но их не больше 48, противоречие. Если изначально лжецов было меньше 50, из аудитории могли выходить только лжецы, снова противоречие. Пусть в аудитории вначале был 51 лжец. Если первым из неё вышел рыцарь, то дальше тоже могли выходить только рыцари, а их меньше 60, противоречие. Значит, первым вышел лжец, но тогда он сказал правду, противоречие. Итак, в аудитории первоначально было по 50 рыцарей и лжецов.

♦ Достаточно доказать, что рыцарей не могло быть ни больше, ни меньше 50, доказывать, что в ситуации 50/50 условие задачи выполнено, не обязательно.

**2.** *Даны 6 идущих подряд натуральных чисел. Их разбили на две тройки чисел, в каждой тройке числа перемножили и вычли из большего произведения меньшее. Какое наименьшее значение может принимать эта разность? Минимум берётся по всем шестёркам чисел и всем их разбиениям.*

**Ответ**. 2. **Решение**. *Оценка*. Допустим, разность двух произведений равна 1. Тогда они имеют разную чётность, и все чётные числа из шестёрки должны составлять одну тройку, а все нечётные ⎯ другую. Но нетрудно проверить, что разность (*n*+1)(*n*+3)(*n*+5)−*n*(*n*+2)(*n*+4) больше 1. Допустим, два произведения равны. Заметим, что среди трёх идущих подряд нечётных чисел есть число *k*, не делящееся ни на 3, ни на 5. Если это единица, то у нас числа от 1 до 6, и произведение, содержащее пятёрку, не может равняться другому. Если же это не единица, то все простые делители числа *k* больше 5. Значит, *k* взаимно просто с остальными числами шестёрки, и потому произведение, содержащее *k*, не может равняться второму произведению. *Пример*. 3⋅4⋅6−2⋅5⋅7 = 2.

♦ Только ответ (без примера): *0 баллов*. Только пример: *2 балла*. При доказательстве оценки верно показано только, что разность не может равняться 1: *0 баллов за оценку*.

**3.** *В первый класс пришли 30 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых восьмерых школьников есть четыре непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников может быть в классе?*

**Ответ**. 345. **Решение**. Предположим, что Вася не знаком хотя бы с семью школьниками. Тогда восьмёрка из Васи и семерых незнакомых ему школьников не удовлетворяет условию задачи. Значит, у каждого школьника не более шести незнакомых, и каждый знаком с не менее чем 23 школьниками. Тогда всего пар знакомых не меньше, чем 30⋅23/2 = 345. Покажем теперь, что 345 пар школьников может быть. Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом и сидящих через одного или через двоих. Эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Действительно, рассмотрим произвольную восьмёрку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим «напротив» него (т.е. с сидящим через трёх от него), поскольку за большим столом он не мог быть ни его соседом, ни сидящим через одного или через двух от него. Итак, мы выбрали четыре непересекающиеся пары знакомых между собой.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**4.** *Число n назовём* ***хорошим****, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что если числа n и n+1 — хорошие, то их произведение — удвоенный квадрат натурального числа.*

**Решение**. Покажем, что в разложение хорошего числа на простые множители каждый нечётный множитель входит в чётной степени. В самом деле, если простое число *p* > 2 входит в разложение числа *n* в степени 2*m*+1, все делители числа *n* можно разбить на пары, где один делитель в *p* раз больше другого. Но, как нетрудно видеть, сумма двух делителей в такой паре чётна, и потому чётна сумма всех делителей числа *n*, а сумма всех его делителей без единицы нечётна, и потому эти делители нельзя разбить на две группы с равными суммами. Таким образом, всякое хорошее число ⎯ либо квадрат, если 2 входит в его разложение в чётной степени, либо удвоенный квадрат, если в нечётной. Поскольку числа *n* и *n*+1 не могут одновременно быть ни квадратами, ни удвоенными квадратами, одно из них ⎯ квадрат, а другое ⎯ удвоенный квадрат, откуда и вытекает утверждение задачи.

***5.*** *Петя написал на первой доске число 5, а на второй ⎯ число 8. За один ход оба написанных числа разрешается либо увеличить на 1, либо умножить на какое-нибудь натуральное число, либо разделить на какой-нибудь их натуральный общий делитель. Можно ли несколькими такими операциями добиться, чтобы на первой доске было написано число 3, а на второй ⎯ число 5?*

**Ответ**. Не может. **Первое решение**. Понятно, что в итоге всё сводится к однократному умножению обоих чисел на некоторое положительное рациональное число с последующим прибавлением к полученным произведениям одного и того же положительного рационального числа. Пусть умножали на *k*, а прибавляли *m*. Если искомое возможно, то 5*k*+*m* = 3, а 8*k*+*m* = 5. Но тогда *m* = −1/3, что невозможно. **Набросок второго решения**. Нетрудно показать, что при всех описанных в условии операциях отношение числа, написанного на первой доске, к числу, написанному на второй доске, либо остается неизменным, либо возрастает, а 3/5 меньше, чем 5/8.

**6.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

♦ Потерян один из ответов: *дыра в 2 балла*.

**7.** *На плоскости проведено n различных прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.*

**Ответ**. 50, 56, 98. **Решение**. Все прямые разбиваются на равные по числу прямых группы параллельных: иначе прямые из группы, где прямых меньше, будут пересекаться с большим числом прямых, чем прямые из группы, где их больше. Пусть имеется *b* групп по *a* прямых в каждой. Тогда каждая прямая пересекает *a*(*b*−1) = 49 прямых. Возможны случаи *a* = 1, *b*−1 = 49 (*n* = 50), *a* = 7, *b*−1 = 7 (*n* = 56) и *a* = 49, *b*−1 = 1 (*n* = 98).

♦ Все примеры без обоснования того, что других примеров нет: *2 балла*.

**8.** *Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?*

**Решение**. Занумеруем арбузы числами от 1 до 11. Сначала взвесим арбузы 3-5, 6-8 и 9-11 и узнаем их суммарный вес. Затем взвесим арбузы 1 и 2 с каждым из арбузов 3-5. Сложив результаты этих взвешиваний, мы узнаем суммарный вес арбузов 1 и 2, если вычтем из этой суммы общий вес арбузов 3-5 и поделим результат на 3.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», первая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

**1.** *Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование?*

**Ответ**. 50. **Решение**. Допустим, изначально лжецов было больше 51. Тогда из аудитории могли выходить только рыцари, но их не больше 48, противоречие. Если изначально лжецов было меньше 50, из аудитории могли выходить только лжецы, снова противоречие. Пусть в аудитории вначале был 51 лжец. Если первым из неё вышел рыцарь, то дальше тоже могли выходить только рыцари, а их меньше 60, противоречие. Значит, первым вышел лжец, но тогда он сказал правду, противоречие. Итак, в аудитории первоначально было по 50 рыцарей и лжецов.

♦ Достаточно доказать, что рыцарей не могло быть ни больше, ни меньше 50, доказывать, что в ситуации 50/50 условие задачи выполнено, не обязательно.

**2.** *Даны 6 идущих подряд натуральных чисел. Их разбили на две тройки чисел, в каждой тройке числа перемножили и вычли из большего произведения меньшее. Какое наименьшее значение может принимать эта разность? Минимум берётся по всем шестёркам чисел и всем их разбиениям.*

**Ответ**. 2. **Решение**. *Оценка*. Допустим, разность двух произведений равна 1. Тогда они имеют разную чётность, и все чётные числа из шестёрки должны составлять одну тройку, а все нечётные ⎯ другую. Но нетрудно проверить, что разность (*n*+1)(*n*+3)(*n*+5)−*n*(*n*+2)(*n*+4) больше 1. Допустим, два произведения равны. Заметим, что среди трёх идущих подряд нечётных чисел есть число *k*, не делящееся ни на 3, ни на 5. Если это единица, то у нас числа от 1 до 6, и произведение, содержащее пятёрку, не может равняться другому. Если же это не единица, то все простые делители числа *k* больше 5. Значит, *k* взаимно просто с остальными числами шестёрки, и потому произведение, содержащее *k*, не может равняться второму произведению. *Пример*. 3⋅4⋅6−2⋅5⋅7 = 2.

♦ Только ответ (без примера): *0 баллов*. Только пример: *2 балла*. При доказательстве оценки верно показано только, что разность не может равняться 1: *0 баллов за оценку*.

**3.** *В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырех школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников может быть в классе?*

**Ответ**. 25⋅11 = 275. **Решение**. *Оценка*. Допустим, есть школьник, незнакомый хотя бы с троими. Тогда для четвёрки из него и этих троих нарушено условие задачи. Значит, каждый незнаком максимум с двоими, то есть пар незнакомых не более 25, а знакомых ⎯ не менее 25⋅24/2−25 = 25⋅11. *Пример.* Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Действительно, рассмотрим произвольную четвёрку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим «напротив» него (т.е. с сидящим через одного от него), поскольку за большим столом он не мог быть его соседом. Итак, мы выбрали две непересекающиеся пары знакомых между собой.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

**4.** *Натуральное число назовём* ***хорошим****, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что число 100! не является хорошим. (100! — это произведение всех натуральных чисел от 1 до 100, взятых по одному разу.)*

**Решение**. Разобьём все делители числа 100! на пары, в которых один делитель получается из другого умножением на 97. Легко видеть, что сумма делителей в каждой паре чётна. Поэтому чётна и сумма всех делителей числа 100!. Стало быть, сумма всех этих делителей без единицы нечётна, откуда и следует утверждение задачи.

**5.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?*

**Ответ**. Не может. **Решение**. Понятно, что в итоге всё сводится к однократному умножению обоих чисел на некоторое положительное рациональное число с последующим прибавлением к полученным произведениям одного и того же положительного рационального числа. Пусть умножали на *k*, а прибавляли *m*. Если искомое возможно, то (5*k*+*m*)/(8*k*+*m*) = 3/5 ⇔ 25*k*+5*m* = 24*k*+3*m*. Но 25*k*+5*m* > 24*k*+3*m*. **Набросок второго решения**. Нетрудно показать, что при всех описанных в условии операциях отношение числа, написанного на первой доске, к числу, написанному на второй доске, либо остается неизменным, либо возрастает, а 3/5 меньше, чем 5/8.

**6.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

♦ Потерян один из ответов: *дыра в 2 балла*.

**7.** *На плоскости проведено n различных прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.*

**Ответ**. 50, 56, 98. **Решение**. Все прямые разбиваются на равные по числу прямых группы параллельных: иначе прямые из группы, где прямых меньше, будут пересекаться с большим числом прямых, чем прямые из группы, где их больше. Пусть имеется *b групп по a прямых* в каждой. Тогда каждая прямая пересекает *a*(*b*−1) = 49 прямых. Возможны случаи *a* = 1, *b*−1 = 49 (*n* = 50), *a* = 7, *b*−1 = 7 (*n* = 56) и *a* = 49, *b*−1 = 1 (*n* = 98).

♦ Все примеры без обоснования того, что других примеров нет: *2 балла*.

**8.** *Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?*

**Решение**. Занумеруем арбузы числами от 1 до 11. Сначала взвесим арбузы 3-5, 6-8 и 9-11 и узнаем их суммарный вес. Затем взвесим арбузы 1 и 2 с каждым из арбузов 3-5. Сложив результаты этих взвешиваний, мы узнаем суммарный вес арбузов 1 и 2, если вычтем из этой суммы общий вес арбузов 3-5 и поделим результат на 3.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», вторая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

**1.** *Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование?*

**Ответ**. 50. **Решение**. Допустим, изначально лжецов было больше 51. Тогда из аудитории могли выходить только рыцари, но их не больше 48, противоречие. Если изначально лжецов было меньше 50, из аудитории могли выходить только лжецы, снова противоречие. Пусть в аудитории вначале был 51 лжец. Если первым из неё вышел рыцарь, то дальше тоже могли выходить только рыцари, а их меньше 60, противоречие. Значит, первым вышел лжец, но тогда он сказал правду, противоречие. Итак, в аудитории первоначально было по 50 рыцарей и лжецов.

♦ Достаточно доказать, что рыцарей не могло быть ни больше, ни меньше 50, доказывать, что в ситуации 50/50 условие задачи выполнено, не обязательно.

**2.** *Можно ли какие-нибудь 6 идущих подряд натуральных чисел разбить на две группы по 3 числа с равными произведениями?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть нашлись такие 6 чисел. Тогда ни одно из них не может делиться на простое число, большее 5: иначе оно будет единственным, делящимся на это число, и произведения равны не будут. Далее, чисел, делящихся на 5, по той же причине должно быть два. Это могут быть только первое и последнее числа шестёрки. Значит, четыре средних могут делиться только на 2 и 3. При этом и на 2, и на 3 может делиться только одно из них, потому что иначе разность двух таких чисел была бы не меньше шести. Но тогда получается, что три из четырёх средних чисел должны быть степенями двойки и тройки, что возможно только если это числа 2, 3, 4. Но тогда нарушается условие насчёт делимости на 5.

**3.** *В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые ⎯ нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди пришедших?*

**Ответ**. 25⋅11 = 275. **Решение**. *Оценка*. Допустим, есть школьник, незнакомый хотя бы с троими. Тогда для четвёрки из него и этих троих нарушено условие задачи. Значит, каждый незнаком максимум с двоими, то есть пар незнакомых не более 25, а знакомых ⎯ не менее 25⋅24/2−25 = 25⋅11. *Пример.* Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Действительно, рассмотрим произвольную четвёрку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим «напротив» него (т.е. с сидящим через одного от него), поскольку за большим столом он не мог быть его соседом. Итак, мы выбрали две непересекающиеся пары знакомых между собой.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*. Показано только, что каждый школьник не знаком не более с двумя другими: *2 балла*.

**4.** *Два узника сидят в двух одиночных камерах. Им устраивают испытание. Каждому в камеру приносят кота. Кот может быть чёрным или белым. Каждый пытается угадать, какого цвета кот у его товарища. Если хотя бы один из узников угадает, то их отпустят на свободу, иначе – казнят. Перед испытанием узники могут пообщаться и договориться о своих действиях. Могут ли они гарантированно освободиться?*

**Ответ**. Да. **Решение**. Один должен назвать цвет своего кота, другой ⎯ цвет, противоположный цвету своего кота. Если коты одноцветные, угадает первый, если разноцветные ⎯ второй.

**5.** *У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?*

**Ответ**. 25⋅11 = 275. **Решение**. *Оценка*. Допустим, есть школьник, незнакомый хотя бы с троими. Тогда для четвёрки из него и этих троих нарушено условие задачи. Значит, каждый незнаком максимум с двоими, то есть пар незнакомых не более 25, а знакомых ⎯ не менее 25⋅24/2−25 = 25⋅11. *Пример.* Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Действительно, рассмотрим произвольную четвёрку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим «напротив» него (т.е. с сидящим через одного от него), поскольку за большим столом он не мог быть его соседом. Итак, мы выбрали две непересекающиеся пары знакомых между собой.

**6.** *Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 ⎯ ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно?*

**Ответ**. *a* = *b* = 0 или *a* = 9, *b* = 8. **Решение**. Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате *u* чёрных клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть *v = b*−*u* чёрных клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие *u* и *v чёрных клеток,* чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть 4*a* чёрных клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых 4*u*+5*v* чёрных клеток, так и квадраты 6×6, в которых 5*u*+4*v* чёрных клеток. Следовательно, *u* = *v*, и 9*u* = 4*a*. Получается, что *u* делится на 4, то есть либо *u* = 0, либо *u* = 4. В первом случае все клетки доски белые и *a* = *b* = 0, во втором ⎯ все клетки чёрные, и *a* = 9, *b* = 8.

♦ Потерян один из ответов: *дыра в 2 балла*.

**7.** *Число N называется* ***особым****, если на плоскости можно провести N различных прямых, каждая из которых пересекается ровно с 10 другими. Найдите 4 особых числа.*

**Ответ**. 11, 12, 15 и 20. **Решение**. 11: Каждые две прямые пересекаются. 12: 6 пар параллельных прямых, прямые из разных пар не параллельны. 15: три пятёрки параллельных прямых, прямые из разных пятёрок не параллельны. 20: две десятки параллельных прямых.

♦ Найдено меньше трёх особых чисел: *0 баллов*. Найдены три особых числа: *4 балла*. Числа без примеров не засчитываются.

**8.** *Имеются 10 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?*

**Решение**. За два взвешивания определим общий вес каких-то шести арбузов. Оставшимися четырьмя взвешиваниями взвесим все четыре тройки, которые можно составить из оставшихся четырёх арбузов. Сложив результаты и поделив сумму на 3, узнаем общий вес этих четырёх арбузов.